Real Academia de MedicinaZaragoza

UN INDICE MATEMATICO SENCILLO PARA VALORAR LA EVOLUCIÓN DE UNA EPIDEMIA

Andériz López, M.

JUSTIFICACION

Con motivo de la actual pandemia de COVID-19 ha alcanzado gran importancia el denominado ***Número básico de reproducción***, designado como ***R0.*** Lo podemos definir como el número de personas que pueden adquirir, mediante contagio, la enfermedad del coronavirus actual, a partir de una sola persona afectada, durante el espacio de tiempo denominado *"Período infectivo".* Una de las razones del interés que suscita es que si su valor es mayor que ***1*** la epidemia puede extenderse en las zonas que padecen la epidemia, mientras que si dicho valor es menor que ***1*** la epidemia puede reducirse e incluso llegar a desaparecer.

Existen varios procedimientos para su cálculo. Los más utilizados se fundamentan en la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales (en tiempo continuo) o de los denominados sistemas de ecuaciones en diferencias (en tiempos discretos). Si bien los primeros han sido considerados como no solucionables mediante técnicas analíticas, disponemos en la actualidad de algunos métodos analíticos de resolución. También es posible resolverlos mediante aproximaciones muy aceptables debidas al "Cálculo numérico".

Entre quienes presentaron modelos matemáticos a este respecto uno de los primeros fue Daniel Bernoulli en 1760 con motivo de una epidemia de viruela. En 1927 Kermak y McKendrick propusieron el modelo **SIR** para el estudio y manejo de epidemias (**S**usceptibles, **I**nfectados, **R**ecuperados). Posteriormente se ha confirmado la evaluación del ***R0*** mediante dichas ecuaciones igualándolo en este modelo al cociente entre la "tasa de contagio", **β**, y la "tasa de recuperación", **γ**, ambas presentes en su planteamiento.

Es evidente que estos cálculos no están al alcance de todas las personas interesadas, y menos aún con la información, generalmente escasa, que sobre este tipo de datos proporcionan los medios de comunicación. Este es el motivo que nos ha impulsado a presentar un procedimiento de evaluación del parámetro que vamos a designar como ***Rg*** [1], a partir de las sumas acumulativas de contagiados que llegan a nuestro conocimiento a través de los informes oficiales, si bien muchos ponen en duda el ajuste de estas sumas a la realidad, lo cual, aunque fuese cierto, no invalidaría el procedimiento empleado aunque sí los resultados reales.

EL PROCEDIMIENTO

Nuestro método se fundamenta en una variedad simple de las ecuaciones en diferencias, por tanto en tiempos discretos (un día). Siguiendo nuestra costumbre y buscando la mejor comprensión del tema, realizamos nuestra exposición ayudados del comentario de un ejemplo, tomado esta vez de la realidad de los hechos sucedidos en fechas recientes y por lo tanto fácilmente comprobables. Como hemos dicho antes, se trata de utilizar los únicos datos numéricos de que ahora disponemos sobre el desarrollo de la epidemia de Covid-19. Esos datos son los totales acumulativos de contagios habidos en **España** desde el principio de la pandemia, por tanto lo que aquí vamos a presentar se refiere a la totalidad del territorio español.

---

[1] Iniciales de **R**azón **g**eométrica. (Progresiones geométricas). También existe el denominado ***Re,*** llamad***o*** "Número de reproducción efectiva" en ciertas publicaciones

El método a seguir se basa en el empleo de la suma de conjuntos de términos consecutivos de las progresiones geométricas. El valor de ***Rg*** es equiparable a la razón de estas progresiones, en las que cada término se forma multiplicando el anterior por un mismo número, ***r***, **la razón** multiplicativa. La fórmula que expresa el valor de esta suma es la siguiente:

$$\boldsymbol{\Sigma}_{(a_1,a_n)} = \frac{\mathbf{a_1\,(r^n-1)}}{\mathbf{r-1}} \qquad [\,1\,]$$

En la que $\sum\ (a_1, a_n)$ es la suma de ***n*** términos, de los que el primero es ***a₁*** y el último ***aₙ* ; *r*** **(**número no negativo) es la **razón** o factor y puede ser mayor, igual o menor que 1; ***n*** **es** el número de términos consecutivos. En este caso los términos, a_i , son el número de los nuevos infectados cada día. Para disponer de los tres datos necesarios en nuestro cálculo, tan solo hemos de anotar la suma acumulativa del día de comienzo del estudio de nuestra muestra, S_1 , la misma suma del último día, S_n , y la del día inmediatamente anterior al primero, S_0. Naturalmente, en su conjunto estos días han de ser consecutivos.

Dado que los sábados y los domingos no se proporcionan actualmente datos en los medios del gobierno, y que el período de tiempo a estudiar es una semana ordinariamente, este estudio puede comenzar un viernes y terminar el viernes siguiente, comprendidos ambos en el período de observación, con lo que tenemos un total de ocho días en cada muestreo, con un día de solape.

Ejemplo-1.- Decidimos comenzar el viernes 14 de agosto pasado, con lo que terminaremos el viernes 21 del mismo mes, reuniendo los datos de ocho días por consiguiente. El día inmediatamente anterior al primero es el 13 de agosto.

Puede comprobarse que las sumas acumulativas de esos días son las siguientes:

Día 13 de agosto	S_0 = 337.334 contagiados hasta esa fecha
Día 14 de agosto	S_1 = 342.813 contagiados hasta esa fecha
Día 21 de agosto	S_n = 386.054 contagiados hasta esa fecha

Por simples operaciones aritméticas (restas) podemos deducir que

$$a_1 = S_1 - S_0 = 342.813 - 337.334 = 5.479$$

En general: $a_k = S_k - S_{k-1}$ $(k = 1, 2, \dots ,n)$ [2]

$$\Sigma_{tot} = S_n - S_0 = 386.054 - 337.334 = 48.720$$

$$\Sigma_{tot} - a_1 = 48.720 - 5.479 = 43.241$$

Aquí está claro que en lugar de S_n podemos poner S_8.

Por medio de sencillas manipulaciones algebraicas podemos despejar la razón, ***r,*** de la fórmula [1] anterior, con lo que obtenemos, haciendo ***r = Rg = x*** , la siguiente expresión, que es una ecuación de grado 8 con una sola incógnita, x.

$$\boldsymbol{(a_1)x^8 - (\Sigma_{tot}\,)x + (\Sigma_{ot} -\ a_1\,) = O} \qquad \textbf{[1']}$$

Haciendo $k = \Sigma_{tot}/a_1$, se obtiene la ecuación equivalente siguiente:

$$\boldsymbol{x^{8} - k\ \ x + (\,k - 1\,) = 0}$$

Ya que son 8 los días y, por tanto, ***n = 8*** los términos de la progresión geométrica que entran en el problema. Esto nos demuestra también que lo más lógico es calcular el valor de ***Rg*** referido a días (mejor que a otro período de tiempo). Sustituyendo ahora los valores de $\boldsymbol{\Sigma_{tot}}$ y de ***a₁*** por las cifras arriba expresadas, tenemos la siguiente ecuación a resolver, que nos dará el valor de ***x = Rg***:

$$\boldsymbol{5.479\ x^{8} - 48.720\ \ x + 43.241 = 0}$$

Esta es una ecuación polinómica de grado 8, con una sola incógnita. Evidentemente una de sus soluciones es ***x = 1***, pero ésta no la tenemos en cuenta. Para resolverla hemos de recurrir al cálculo numérico, aplicando los

[2] ***Sₖ*** *es la suma acumulada correspondiente al día* ***k***.

procedimientos propios del mismo en sucesivas iteraciones. Los más usados aquí son el de Newton, el denominado "de la secante" y el "regula falsi". Nosotros disponemos de un programa informático especial del **QB64,** del que somos autores, que proporciona la solución en el acto y que ofrecemos de forma gratuita a quienes nos lo soliciten.

Conviene en este momento recordar que en este tipo de ecuaciones los números que expresan las soluciones son con frecuencia complejos y no reales. En las ecuaciones de orden impar siempre hay al menos una solución real, que en este tipo de ecuaciones sería igual a **1** , no válida para nuestro objetivo como hemos ya señalado. De aquí que aconsejemos preparar solo ecuaciones de orden par, ***8*** en nuestro ejemplo.

En estas condiciones la solución es ***x = Rg = 1,03*** (por día, como hemos indicado). Si se quisiera referir el ***Rg*** a una semana, la que ha servido para utilizar estos datos, habría que elevarlo a la potencia ***7*** (ya que el primer término no se multiplica por la razón, **r**) o sea $\boldsymbol{Rg_{sem} = 1{,}03^7 = 1{,}23}$. Estas cifras son coincidentes en este ejemplo con las del ***R0*** proporcionadas por el Ministerio de Sanidad, lo cual no equivale a igualdad de ambos índices.

Todo esto, traducido al concepto inicial, querría decir que durante esa semana cada paciente infectado pudo contagiar en promedio a 1,03 personas sanas en relación al día anterior, y que cada uno de los días, a partir del primero, a $1{,}03^k$ personas, siendo k = 2, 3, …7. En conjunto, al cabo de la semana $\boldsymbol{Rg_{sem}}$ = 1,23 personas. Es decir, la epidemia no llevaba camino de extinguirse, pues para ello hubiera sido preciso un valor de ***Rg*** menor que 1. Recordemos que la razón, ***r,*** es mayor que 1 en la progresiones geométricas crecientes y menor que 1 en las decrecientes, de forma similar a lo que sucede con el ***R0*** y el ***Rg*** en las epidemias. [4] Esta característica es común a ambos valores aunque éstos puedan discrepar algo en otros casos.

Comprobación.- Vamos a realizarla de dos formas: una de ellas global, abarcando los 8 términos (días) de la experiencia; la otra consistirá en estudiar por separado, con la técnica que hemos expuesto, dos grupos disjuntos de 4 términos cada uno de ellos: por una parte los cuatro primeros y por otra lo cuatro últimos. Como es natural, la distribución de los $\boldsymbol{a_i}$ es aleatoria, y no siguen exactamente la norma de que cada término es igual al anterior por la razón.

Vamos también a reconstruir uno por uno los ocho términos a partir del primero, multiplicando el anterior por el ***Rg*** hallado. De forma paralela obtendremos estos mismos términos por diferencias sucesivas de las sumas acumulativas. En este último caso vendrá agrupada en un solo dato la suma de contagios del sábado, domingo y lunes, debido a que los fines de semana no se suministran datos. Con estos resultados configuramos la siguiente Tabla.

<table>
<tr><th>Fecha</th><th>Sumas acumul.
$S_0 = 337.334$</th><th>a_i = Valores reales</th><th>(a_i) = Valores calculados</th><th>Sumas del grupo real</th></tr>
<tr><td>Viernes, 14</td><td>$S_1 = 342.813$</td><td>5.479</td><td>5.479</td><td rowspan="4">21.748</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Sábado, 15
Domingo, 16
Lunes, 17</td><td rowspan="3">359.082</td><td rowspan="3">16.269</td><td>5.643</td></tr>
<tr><td>5.813</td></tr>
<tr><td>5.987</td></tr>
<tr><td>Martes, 18</td><td>364.196</td><td>5.114</td><td>6.167</td><td rowspan="4">26.972</td></tr>
<tr><td>Miércoles, 19</td><td>370.867</td><td>6.671</td><td>6.352</td></tr>
<tr><td>Jueves, 20</td><td>377.906</td><td>7.039</td><td>6.542</td></tr>
<tr><td>Viernes, 21</td><td>$S_8 = 386.054$</td><td>8.148</td><td>6.739</td></tr>
<tr><td>Suma total</td><td></td><td>48.720</td><td>48.722</td><td>48.720</td></tr>
</table>

Llaman aquí la atención dos cosas: por una parte el perfecto ajuste de la suma total de contagiados en el grupo "ficticio", con un error en relación al real de tan solo el **0,004 %.** Por otra parte encontramos cifras ostensiblemente mayores que las "previstas" en los tres últimos datos (filas) de la columna correspondiente a los valores reales. Para buscar la explicación de esta discordancia vamos a resolver las respectivas ecuaciones polinómicas sobre la primera mitad de los días observados y también sobre los últimos cuatro días. No olvidemos que ahora estamos manejando los datos ***reales***, si bien el procedimiento empleado es el mismo que hemos descrito. El lector, a la vista de la Tabla, puede comprobar por sí mismo los datos que siguen:

[4] Debido a la duración del período de incubación y de contagio se acepta el solapamiento de fechas.

Ecuación 4 primeros días: $5.479\,x^4 - 21.748\,x + 16.269 = 0$ $x = Rg = 0.995$
Ecuación 4 últimos días: $5.114\,x^4 - 26.972\,x + 21.858 = 0$ $x = Rg = 1.188$

Estas diferencias entre los datos recogidos los primeros días y los últimos se hubieran detectado también si se hubiese empleado el ***R0*** , puesto que similares fenómenos han sido observados por la mayoría de los investigadores de este tema. Posteriormente tendremos ocasión de aclararlo con carácter más estable.

En resumen: Los beneficios que proporciona el conocimiento del ***Rg, al igual que el R0,*** son importantes sobre todo en la previsión del tiempo de duración de la epidemia, pero la inestabilidad (y variabilidad aleatoria subsiguiente) del mismo valor hace que sus determinaciones, más o menos exactas, deban repetirse con frecuencia. A ser posible, diariamente en cada zona afectada. Tampoco podemos determinar con exactitud el período infectivo y las características temporales propias de cada caso.

COMPLETANDO

No quedaría completo lo que queremos decir en este ensayo si no planteáramos una cuestión muy relacionada con el tema objeto del estudio. En efecto, surge de inmediato la pregunta ¿ por qué no utilizamos la fórmula que en las progresiones geométricas (las únicas que está justificado emplear en estos casos) nos permite calcular el valor de un término cualquiera, a_n, conociendo el valor del primero, a_1, y la razón multiplicativa, r ?
Esta fórmula es la siguiente

$$a_n = a_1\ r^{n-1} \qquad [2]$$

Aparentemente sería más sencillo el cálculo. Es más, se utiliza esta fórmula para conocer el posible tiempo de duplicación del número de casos infectados. Haciendo $a_n = 2 \cdot a_1$, de la fórmula [2] se deduce fácil y sucesivamente

$$\ln\ (r) = \frac{\ln(2)}{n-1} \qquad\qquad n = 1 + \frac{\ln(2)}{|\ln(r)|}$$

datos que aplicados a nuestro ejemplo, con $Rg = r = 1{,}03$, darían un resultado de $n = 24{,}45$ días. Los trazos verticales del denominador último significan "valor absoluto", o sea prescindiendo del signo, ya que si $r < 1$ su logaritmo será un número negativo, en cuyo caso sería $a_n / 2 = a_1$, con lo que se justifica el valor absoluto para mantener el signo + antes del quebrado, tanto si se trata de duplicar como de reducir a la mitad.

Podemos y debemos generalizar la fórmula de duplicación dividiendo cualquier valor de a_n por el valor de a_1 , con lo que la fórmula [2] adopta la expresión $a_n / a_1 = r^{n-1}$ **[3]**

de donde obtenemos $$`\ln(r) = \frac{\ln\ a_n - \ln a_1}{n-1} = \frac{\ln(a_n/a_1)}{n-1}$$

Si aplicamos esta última fórmula al valor ***calculado*** de a_6 , ,por ejemplo, obtenemos $Rg = 1{,}03$, que naturalmente coincide con el anterior. Pero, ¿ Qué pasará si lo aplicamos a los cuatro últimos datos ***reales*** ? Vamos a comprobarlo. (Estos datos se refieren a a_5, a_6, a_7, a_8)

$\ln(r_5) = \ln(a_5/a_1)/(5-1) = -0{,}06894 / 4 = -0{,}0172$ de donde $Rg_5 = 0{,}983$
$\ln(r_6) = \ln(a_6/a_1)/(6-1) = 0{,}19685 / 5 = 0{,}03937$ de donde $Rg_6 = 1.040$
$\ln(r_7) = \ln(a_7/a_1)/(7-1) = 0{,}25054 / 6 = 0{,}04176$ de donde $Rg_7 = 1{,}043$
$\ln(r_8) = \ln(a_8/a_1)/(8-1) = 0{,}39685 / 7 = 0{,}05669$ de donde $Rg_8 = 1.058$

El comentario a estos resultados era en cierto modo esperable. La fiabilidad del cálculo del ***Rg*** fundamentada en datos aislados o muy escasos debe ponerse en duda, siendo muy arriesgada su interpretación, especialmente los pronósticos. Pese a todo, considerando estos últimos resultados en su conjunto, se puede apreciar el recrudecimiento del rebrote de la epidemia en la segunda parte del período de tiempo analizado. En las determinaciones diarias del ***Rg*** hay que tener en cuenta la aleatoriedad a la que inevitablemente están sujetos los datos aislados. Lo mismo se puede decir del ***R0***

Si confiamos en la multiplicidad de las observaciones para reducir el probable error de medición en lo posible, no cabe duda que la utilización de la suma de los términos de una progresión geométrica (fórmula [1]) es preferible a la de establecer un simple cociente entre el término a_n y el término a_1 . En todo caso nos congratula comprobar que nuestros resultados, inconvenientes incluidos, no difieren mucho de los obtenidos por otros investigadores del R_0.

La fórmula [3] también puede adoptar la forma más sencilla,

$$r = \left(\frac{a_n}{a_1}\right)^{1/(n-1)} \qquad [3`]$$

Aquí r resulta ser la ***media geométrica*** de los r_i muestrales. Proporcio
Idénticos resultados que los últimos cálculos sin tener que usar logaritmo

La ventaja que tiene calcular la razón de la progresión de las dos maneras, partiendo de la fórmula [1] ***suma*** de los n términos y de la fórmula [2] ***cálculo*** de a_n, permite comprobar si los ocho datos que entran en consideración mantienen similar la razón, en cuyo caso ambos valores de r deben ser sensiblemente aproximados, o si, por el contrario, ambos valores son claramente desiguales, lo que denota que ha habido cambio del valor de *Rg* en el período de tiempo correspondiente a la muestra tomada. En este último supuesto, si el valor obtenido a partir de la fórmula [3'] es superior al obtenido a partir de la fórmula [1] eso indica que ha habido "rebrote" en el intervalo de tiempo utilizado, pero si dicho valor es menor eso denota tendencia momentánea a la reducción de la propagación de la epidemia.

Como es lógico, los valores de r obtenidos a partir de la **construcción teórica** coinciden tanto si utilizamos la fórmula [1] como la fórmula [3]. En el ejemplo comentado, en ambos casos se obtiene ***r = x = Rg = 1,030***. Sin embargo **en los datos reales** el uso de [1] arroja un ***r = 1,030*** pero el uso de [3] suministra un ***r = 1,058***, señal de conato de "rebrote".

Esta peculiaridad no es tan rara como parece. Por ejemplo, en la semana, comprendida entre el 4 y el 11 de septiembre, ambos días inclusive, los valores ***Rg*** , tanto obtenidos mediante el cálculo como a partir de los datos reales por el empleo de [1] son ***Rg = 0,979***. Sin embargo, para la fórmula [3] estos mismos datos son respectivamente ***Rg = 0,979*** y ***Rg = 1,022***.

Si el lector lo desea, puede comprobar los datos de esta última semana utilizando los medios que este texto proporciona. Le facilitamos los valores S_i , a_i del viernes 4 al viernes11, de las sumas publicadas, S_i , y del cálculo de a_i , tal como puede verse en la página 2:

S_0=488.513; S_1=498.989; S_{2+3+4}=525.549; S_5=534.513; S_6=543.379; S_7=554.143; S_8=566.326
a_1=10.476; $a_2+a_3+a_4$=26.560; a_5=8.964; a_6=8.866; a_7=10.764; a_8=12.183

Insistimos en que los valores de ***Rg*** y ***R0*** varían continuamente a lo largo del tiempo de la epidemia, así como el valor de r en las progresiones geométricas muestrales, y que ambos valores se desarrollan en la misma escala: mayores que ***1*** cuando crece el sustrato y menores que ***1*** cuando disminuye. Estas variaciones son independientes del método empleado: progresiones geométricas, ecuaciones en diferencias y ecuaciones diferenciales.

UNA TABLA DE RESULTADOS

Hemos tomado, día a día, los datos numéricos que ha facilitado el gobierno sobre la evolución de la actual pandemia de coronavirus en España desde finales de febrero. A medida que pasaba el tiempo los hemos ido agrupando por semanas en las condiciones que hemos expuesto anteriormente. Hemos formado con estos datos la Tabla que a continuación presentamos. Está confeccionada de manera que se pueden reconstruir todos los datos del tiempo transcurrido hasta el momento de redactar estas líneas, tal como figuran en el ejemplo que hemos presentado. Para ello habrá que tener en cuenta las siguientes indicaciones.

El número de filas, a cada una de las cuales corresponde una semana, es de 27. El número de columnas es 7. Cada una de las semanas reseñadas comienza y termina en un viernes, lo que significa que no son exactamente semanas sino conjuntos muestrales de 8 días cada uno de ellos, existiendo, por tanto, un solapamiento de un día entre una y otra semanas. Los índices ***Rg*** se evalúan pues sobre conjuntos de 8 días consecutivos.

La primera columna señala las fechas de comienzo y terminación de los datos recogidos en la fila correspondiente. Ambas fechas son, pues, viernes consecutivos. Las dos columnas siguientes proporcionan los datos para realizar todas las operaciones que se describen en el ejemplo-1. La primera de estas dos columnas son los valores de las sumas acumulativas S_1 y la segunda los valores de a_1. Los valores de S_8 y de a_8 , necesarios para los cálculos, (recordemos que ahora n = 8), son los respectivos valores S_1 y a_1 de la semana siguiente, o sea de la fila siguiente. En cuando al valor S_0 ***es igual a*** $S_1 - a_1$, como fácilmente se deduce.

Las tres siguientes columnas muestran los valores ***Rg*** obtenidos en cada fila. Recordamos que ***R'g*** está obtenido empleando cualquiera de las fórmulas [3] o [3'], y el R_{sem} es el correspondiente a la semana entera, tal como se decía en la página 3.

En cuanto a la última columna ha sido calculada para evaluar, de acuerdo al ***Rg*** correspondiente, el tiempo que habría de transcurrir, expresado en días, si no variase este índice, para duplicar (**dpl**) el número de contagiados en el caso de ser ***Rg > 1***, o bien para reducirlos a la mitad (**mit**) si ***Rg < 1***. Reproducimos aquí la fórmula, que figura en la página 4, debajo de la fórmula [2]. Es importante lo del valor absoluto del denominador, señalado por los dos trazos verticales, ya que si ***Rg < 1***, su logaritmo será negativo.

Tabla resumen de los resultados obtenidos en España hasta el 25 septiembre. [5]

FECHAS	S_1	a_1	Rg	R'g	R_{sem}	$Días_{dm}$
20 al 27 marzo	20.577	3.182	1,168	1,139	2,966	5,5 dpl
27 m. al 3 abr.	64.095	7.878	0,999	0,986	0,993	694 mit
3 al 10 abril	119.199	7.134	0,930	0,939	0,602	10,5 mit
10 al 17 abr.	157.022	4.576	0,992	1,020	0,945	87 mit
17 al 24 abr.	188.068	5.252	0,963	1,036	0,768	19 mit
24 a.al 1 may.	219.764	* 6.740	0,906	0,993	0,501	8 mit
1 al 8 mayo	215.216	1.781	0,877	0,967	0,399	6,3 mit
8 al 15 mayo	222.857	1.410	0,925	0,894	0,579	10 mit
15 al 22 mayo	230.183	643	1,008	1,157	1,057	88 dpl
22 al 29 mayo	234.824	1.787	0,694	0,868	0,078	3 mit
29 m. al 5 jun.	238.564	658	0,834	0,901	0,281	5 mit
5 al 12 junio	240.978	318	1,001	1,067	1,007	694 dpl
12 al 19 junio	243.209	502	0,901	0,932	0,482	7,5 mit
19 al 26 junio	245.575	307	1,020	1,045	1,149	36 dpl
26 j. al 3 julio	247.905	419	0,974	1,008	0,832	27 mit
3 al 10 julio	250.545	442	1,021	1,106	1,157	34 dpl
10 al 17 julio	253.908	892	1,004	1,067	1,028	175 dpl
17 al 24 julio	260.255	1.400	1,054	1,070	1,445	14 dpl
24 al 31 julio	272.421	2.255	1,005	1,046	1,036	15 dpl
31 j. al 7 ago.	288.522	3.092	1,044	1,055	1,352	17 dpl
7 al 14 agosto	314.362	4.507	0,974	1,028	0,832	27 mit
14 al 21agost,	342.813	5.479	1,030	1,058	1,230	24 dpl
21al 28 agost.	386.054	8.148	0,983	1,026	0,887	41 mit
28 ag. al 4 sept	439.286	9.779	0,966	1,010	0,785	21 mit
4 al 11 septbre	498.989	10.476	0,979	1,022	0,862	34 mit
11 al 18 sept.	566.326	12.183	0,964	1.024	0,774	20 mit
18 al 25 sept.	640.040	14.389	0,931	0,978	0,606	11 mit

[5] El asterisco denota defecto de emisión de datos oficiales en la casilla afectada.
Complementos para cálculos sobre última fecha: S_8 = 716.481 ; a_8 = 12.272

Con ello se consigue que siempre $\boldsymbol{n\ (tiempo\ en\ días)} = \ \mathbf{1} + \dfrac{\mathbf{ln(2)}}{|\mathbf{ln(r)}|}$
donde ***r***, que es la razón de la progresión geométrica, es el valor de ***Rg***.

Ejplo-2, práctico.- Para proporcionarnos, por ejemplo, los datos de la semana del 8 al 15 de mayo mediante la Tabla, y poder desarrollar los cálculos expuestos en la página 2, procederemos así:

$S_0 = S_1 - a_1 = 221.447$; $S_8 = 230.183$ **y** $a_8 = 643$ (línea siguiente). $\Sigma_{tot} = S_8 - S_0 = 8.736$

Ecuación: $1.410\, x^8 - 8.736\, x + 7.326 \quad 0 \quad Rg \quad 0{,}925$; $R'g \quad 0{,}894$; $R_{sem} = 0{,}579$

Entre los varios comentarios a que puede dar lugar la consideración de los datos de esta Tabla, destacan dos hechos: **el repunte de la epidemia** iniciado en las semanas de la segunda mitad del período de observación, con visible repercusión sobre la mayor frecuencia de valores del ***Rg >1***, y el **aumento de contagios** que muestra el ***R'g*** en la segunda mitad de cada semana, detectada por el ***R'g >*** , como también se comentó, en muy sospechosa relación con las acumulaciones de personas el fin de la semana anterior a esta alteración varias veces reiterada.

CONCLUYENDO

Se he presentado un procedimiento sencillo para subsanar la dificultad que puede suponer el cálculo del R_0 , que suple en lo posible la información epidemiológica que este índice nos proporciona. El ***Rg*** desempeña un servicio análogo y con fuertes parecidos, como hemos tenido ocasión de comprobar, pero no son iguales en modo alguno.. También el ***Rg*** ofrece ventajas estimables, ya que el R_0 espropio de cada modelo epidemiológico que se utilice, mientras que el ***Rg*** es efectivo en cualquier modelo y posible de realizar aunque falte la cifra de recuperados del modelo **SIR**.

En la práctica aconsejamos realizar el ***Rg*** con su complementario ***R'g*** expresado en las fórmulas [3] y [3'], que nos permiten detectar irregularidades en la distribución aleatoria de la incidencia de contagios en el período de muestreo de cada semana, tanto en el sentido de acumulación final como inicial, tal como lo hemos comentado.

Llegados a este punto conviene subrayar que el R`g es la media geométrica de los valores de r entre a_1 y a_8. Como hemos insinuado, se obtiene en la práctica mediante la siguiente fórmula.

$$R`g = \left(\frac{a_8}{a_1}\right)^{1/7}$$

R_{sem} o sea el Rg propio de toda una semana, obdece a esta otra fórmula.

$$R_{sem} = (\ Rg\ )^{7}$$

El R_0 y el Rg.- No podemos terminar esta exposición sin poner sobre el tapete una mención a las posibles relaciones entre el R_0 (número reproductivo básico) y el ***Rg***. En efecto, ambos procedimientos tienen como principal objetivo intentar valorar la evolución de una epidemia y ambos tienen aspectos comunes y aspectos diferentes.

En primer lugar conviene señalar que uno y otro coinciden en los resultados fundamentales, a saber: valores superiores a **1** indican progresión de la epidemia con aumento comprobado de casos, mientras que valores inferiores a **1** suponen disminución que puede llegar a extinción de la misma. Los valores muy próximos a esta cifra, tanto si lo son por arriba como si lo son por debajo, hablan en favor de una estabilización de la enfermedad.

Hay una diferencia substancial entre ambos: el ***Rg***, tal como lo hemos explicado, es una búsqueda de la media de la razón (geométrica) de crecimiento referido al intervalo de un solo día, mientras que el R_0 investiga esa misma razón o tasa mientras dura el período de contagio, que suele variar según las circunstancias geográficas, ambientales y otras. No es incorrecta a nuestro juicio la definición que vincula el R_0 al número de personas contagiadas durante dicho período por una sola persona transmisora del agente patógeno.

La determinación del ***R0*** se suele realizar mediante la resolución del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias propias del modelo epidemiológico a seguir, usualmente el **SIR** y el **SEIR**, si bien también pueden utilizarse otros modelos matemáticos. Este cálculo suele ser laborioso y equipara al ***R0*** con un cociente de parámetros que forman parte de dichas ecuaciones, como por ejemplo $R_0 = \beta / \gamma$, siendo β la tasa de contagio y γ la de recuperación en el modelo SIR. En cambio, el cálculo de ***Rg*** puede realizarse en cualquier tipo de modelo.

Este tipo de evaluaciones está sometido en todo caso, como reiteradamente hemos indicado, a las fluctuaciones aleatorias de los fenómenos biológicos, por lo que es aconsejable realizarlas con muestras lo más numerosas posible dentro de unos límites sensatos. Es por este motivo por el que hemos elegido “semanas de ocho días”, con solapamiento de los extremos, para el desarrollo de este tema. Es más, este tiempo de ocho días es una media frecuente del período de contagio, muy variable como sabemos.

Podemos terminar este comentario con una fórmula que relaciona ambos índices con la mayor probabilidad posible. Esta fórmula, como la que ya hemos utilizado en el texto, es

$$R_0 \sim (Rg)^{n-1} \qquad [\,4\,]$$

donde el signo ~ significa “aproximadamente igual”, y ***n*** es el promedio de los días estimado para dicho período según la experiencia de cada investigador. En la tabla de la página 6 lo denominamos Rg_{sem} o “semanal”, consecuentemente con lo que venimos observando.

Al término del Apéndice primero completaremos estas ideas con una aproximación lógica al valor real del **R0**.

APÉNDICE 1º.- La incidencia acumulada.

Muy recientemente el gobierno nacional, así como los autonómicos, han decidido retirar de su información diaria el ***R0***, consignando en su lugar la llamada ***Incidencia acumulada, Ia,.*** Este concepto es el número de contagios nuevos en determinado período de tiempo hasta el día de la fecha del informe. Es condición indispensable que todos estos períodos sean de igual duración, por lo común una semana o bien 14 días, siempre terminando el día en que se comunican los resultados o la fecha que previamente se establece, por ejemplo todos los viernes si queremos que este período sea semanal. Cuando se informa todos los días el período debe terminar el día de la fecha de dicho informe, por lo que el valor de ***Ia*** experimenta pequeños cambios en tal caso.

Para poder homologar las distintas comunidades autónomas, esta cifra de casos nuevos debe sr referida “***por cien mil habitantes***”. Llamando ***Nc*** al número de casos nuevos en dicho período, ***Fi*** al cociente ***100.000 / número de habitantes***, y ***Ia*** a la incidencia acumulada, aplicando una regla de tres simple y directa, fácilmente obtenemos: $Ia = Nc \times Fi$. Por ejemplo, según el censo, en los casos de

En Aragón, ***Fi*** = 100.000/1.319.291 = ***0,07579829***
En Navarra, ***Fi*** = 100.000/654.214 = ***0,15285518***
En España, ***Fi*** = 100.000/47.026.208 = ***0,00212647***

Así, por **ejemplo**, si la semana del 26 de septiembre al 2 de octubre, ambos días incluídos, el número de contagiados fue de 73.451 en España, con lo que la incidencia acumulada en dicho espacio de tiempo es igual a 73.451 × 0,00212647 = ***156,19***

Conviene tener en cuenta que la incidencia acumulada en España viene expresada en períodos de 14 días en los partes oficiales. Nosotros pensamos, con otros autores que es preferible informar por períodos de 7 días, suficientes para juzgar de la evolución de la pandemia y con escasa probabilidad de que los casos nuevos hayan pasado en esos 7 días a recuperados. [6]

Comparación de dos semanas consecutivas (o períodos de tiempo iguales)

Se realiza mediante lo que se denomina **Razón de Tasas**, ***RT***, que es el cociente

***RT = Ia* del último período / *Ia* del período anterior**.

Fácilmente se observa que, simplificando el cociente, o sea dividiendo numerador y denominador por ***Fi***, necesariamente el mismo en cada región o zona estudiada, nos queda:

***RT = Nc* del último período / *Nc* del período anterior.**

Por **ejemplo**, Siguiendo con los datos anteriores, si la **semana anterior**, del 19 al 25 de septiembre, hubo en España 76.441 casos nuevos, la ***Ia = 162,55*** el cociente ***RT*** sería:

156,19/162,55 = 73.451/76.441 = ***0,961***

Lo que viene a significar que parece ser "que se ha detenido" el rebrote, e incluso que ha podido mejorar ligeramente. Está claro que hay que seguir los controles las próximas semanas.

Estas técnicas, aunque están sujetas a los errores de casi todas ellas, tienen un indudable valor, permitiéndonos también comparar zonas o regiones al referir los datos a la cifra fija de 100.000 habitantes. Verdad es que no tienen en cuenta los cambios de población, ni tampoco los nacimientos y los fallecimientos, pero estos fallos son propios de algunos modelos matemáticos de estudio de epidemias, por ejemplo el SIR entre otros.

NOTA.- Los lectores de este artículo pueden calcular fácilmente el número de casos nuevos de cada una de las semanas restándole el valor de a_1 a la suma de casos en los ocho días abarcados, con lo que queda la semana "justa". Podemos utilizar cualquiera de las igualdades siguientes:
$Nc = S_8 - S_1$; $\Sigma_{tot} - a_1 =$ ***Coeficiente de*** C_0 **(**término independiente) ***en la ecuación de grado 8.***

Propiedades de las frecuencias acumuladas.

Es fácil deducir, en función de lo dicho, estas dos propiedades:

1ª) **NCnP1 / NCnP2 = FaP1 / FaP2**

Donde **Nc** es el número de nuevos casos y **Fa** la frecuencia acumulada, ambos en dos períodos diferentes de tiempo: **P1** y **P2**. Se trata aquí de razones de tasas.

2ª) **Si P0 = P1 +P2, FaP0 = FaP1 +`FaP2**

Lo que permite a veces simplificar los cálculos. Así, por ejemplo, en un cálculo de una frecuencia acumulada de dos semanas, $\mathbf{Fa_{14\ días} = Fa_{7\ días} + Fa_{mismos\ 7\ días\ de\ la\ semana\ anterior}}$.

NOTA.- La razón o cociente de tasas de la Incidencia acumulada de una semana dividida por su anterior, es una excelente aplicación para estimar el valor del $\mathbf{R_0}$ en las condiciones en que se verifica dicha razón de tasas, ya que se dan las exigencias óptimas de duración del tiempo de contagio, incluyéndose también la neutralización de errores aleatorios de cualquier tipo, incluida la variabilidad temporal del propio $\mathbf{R_0}$.

Ejemplo.- En la Tabla siguiente (página 11), en la quinta columna van apareciendo cifras de $Ia_7 / Ia_{7\ anterior}$ = ***1,266; 0,686; 0,821; 1,021; etc,*** que pueden equipararse a los valores sucesivos del índice $\mathbf{R_0}$ en las fechas señaladas en la primera columna.

[6] Desde el día 29 de octubre de 2020 los partes oficiales incluyen también períodos de 7 días.

APÉNDICE 2º.- La interpretación de Tablas Epidemiológicas.

Los datos epidemiológicos que se exponen con frecuencia en forma de Tablas tienen una innegable utilidad. A esto se añade que pueden estar a disposición de muchas personas con niveles culturales muy diversos. Suponiendo que la información que ofrecen es verídica y que puede ser de gran utilidad, es necesario sin embargo facilitar unas nociones y comentarios que ayuden a interpretarlas para obtener el mayor provecho posible del contenido que suministran.

En efecto, las bases del entendimiento de las Tablas se apoyan en dos pilares imprescindibles: la Matemática y la Estadística. Su interpretación supone conocimientos de ambas disciplinas y estos conocimientos no siempre los poseen todos los lectores. El objetivo de estas líneas es proporcionar elementalmente una parte de los mismos a fin de obtener de su consulta el máximo aprovechamiento posible en cada caso. Siguiendo nuestra costumbre, los comentarios que siguen los hacemos sobre la Tabla que aparece en la página siguiente, formada con datos proporcionados por el gobierno y referentes a la totalidad de España.

Descripción general de la Tabla

Cada una de las filas recoge los datos de la semana que se indica en la primera columna. Comienzan en cada caso en viernes y terminan en el viernes siguiente, lo que quiere decir que se trata de períodos de ocho días consecutivos con las matizaciones que hacemos acto seguido.

Las columnas de la tabla, que a continuación explicamos, están dividida en dos bloques de cuatro columnas cada uno de ellos, ambos a continuación de las casillas de fechas.

Medidas de situación.- Las primeras fechas hay que correrlas una unidad a la derecha. Por ejemplo, para la primera fila son "*del 21 al 27 de marzo*". En esta primera mitad de la tabla se trata, pues, de semanas de siete días: de un sábado al viernes siguiente. Esto obedece a que precisa operar con "semanas de 7 días" en algunas ocasiones, así como a la falta de datos de los fines de semana.

Las llamamos *Medidas de situación* porque nos muestran la magnitud de afectación de la pandemia, en el período de tiempo señalado, mediante la medición de la ***Incidencia acumulada***, ***Ia***, Ésta es el número de nuevos contagios, **Nc**, con enfermedad o con PCR positivo, habidos en períodos de tiempo fijos: una o semanas, con las condiciones de que se trate de días consecutivos que terminan en la segunda de las fechas señaladas. Los datos que proporciona el gobierno se refieren a los últimos 14 días pero también se utilizan mucho los datos de los 7 últimos días.

Estos datos no se muestran en su número real sino en forma de una tasa: casos positivos por cada cien mil habitantes. La conversión se hace mediante una sencilla regla de tres simple directa, o lo que es lo mismo, teniendo en cuenta los ***47.026.208*** habitantes que indica el censo consultado, multiplicando el número de nuevos contagios por el cociente ***100.000/47.026.208 = 0,00212647***. Este proceder nos permite homologar los resultados en comunidades de diferente número de habitantes, al reducir todas las evaluaciones a una tasa por cien mil habitantes en cada caso. Estas cifras homologadas son las que aparecen en la primera columna de esta sección, referida a períodos de 14 días, mientras que en la tercera columna se trata de períodos de 7 días.

En las columnas segunda y cuarta de esta misma sección de "Medidas de situación" figuran los denominados "***Cocientes de tasas de incidencia acumulada***". Estos cocientes se obtienen dividiendo la incidencia acumulada actual por la anterior en cada caso. El resultado obtenido al considerar los datos que aquí figuran es el mismo que si se dividen las cantidades de nuevos contagios sin homologar, ya que se trata de un ejercicio de simplificación de quebrados.

Las casillas que aparecen con un asterisco denotan o bien falta de datos suministrados, o que no hay referencias del período anterior, estas últimas son lógicas en la primera fila. En el examen del conjunto temporal de estas medidas se aprecian perfectamente el brote inicial, el período de relajación siguiente y el rebrote aparecido en la segunda mitad del espacio de tiempo considerado. Ver también el gráfico que se muestra a continuación de la Tabla, de origen oficial.

PANDEMIA COVID-19 ESPAÑA 2020 (Hasta fines de octubre)

	MEDIDAS DE SITUACIÓN				MEDIDAS DE EVOLUCIÓN			
FECHAS	**Ia** $_{14\ días}$	**Rz.**$_{14}$ **Ts**	**Ia** $_{7\ días}$	**Rz.**$_{7}$ **Ts**	**Rg**	**R'g**	R_{sem}	**Días**$_{dm}$
20 al 27 marzo	145,544	*	92,540	*	1,168	1,139	2,966	5,5 dpl
27 m. al 3 abr.	209,717	1,441	117,177	1,266	0,999	0,986	0,993	694 mit
3 al 10 abril	197,606	0,942	80,429	0,686	0,930	0,939	0,602	10,5 mit
10 al 17 abr.	146,448	0,741	66,018	0,821	0,992	1,020	0,945	87 mit
17 al 24 abr.	133,419	0,911	67,401	1,021	0,963	1,036	0,768	19 mit
24 a.al 1 may.	*	*	12,229	*	0,906	0,993	0,501	8 mit
1 al 8 mayo	28,478	*	16,248	1,329	0,877	0,967	0,399	6,3 mit
8 al 15 mayo	31,827	1,118	15,579	0,959	0,925	0,894	0,579	10 mit
15 al 22 mayo	25,447	0,800	9,869	0,633	1,008	1,157	1,057	88 dpl
22 al 29 mayo	17,822	0,700	7,953	0,806	0,694	0,868	0,078	3 mit
29 m. al 5 jun.	13,086	0,734	5,133	0,645	0,834	0,901	0,281	5 mit
5 al 12 junio	9,877	0,755	4,744	0,924	1,001	1,067	1,007	694 dpl
12 al 19 junio	9,775	0,990	5,031	1,061	0,901	0,932	0,482	7,5 mit
19 al 26 junio	9,986	1,022	4,955	0,985	1,020	1,045	1,149	36 dpl
26 j. al 3 julio	10,569	1,058	5,614	1,133	0,974	1,008	0,832	27 mit
3 al 10 julio	12,765	1,208	7,151	1,274	1,021	1,106	1,157	34 dpl
10 al 17 julio	20,648	1,618	13,497	1,887	1,004	1,067	1,028	175 dpl
17 al 24 julio	39.367	1,907	25,871	1,917	1,054	1,070	1,445	14 dpl
24 al 31 julio	60,109	1,527	34,238	1,323	1,005	1,046	1,036	15 dpl
31 j. al 7 ago.	89,186	1,484	54,948	1,605	1,044	1,055	1,352	17 dpl
7 al 14 agosto	115,449	1,294	60,500	1,101	0,974	1,028	0,832	27 mit
14 al 21agost,	152,451	1,321	91,951	1,520	1,030	1,058	1,230	24 dpl
21al 28 agost.	205,147	1,346	113,196	1,093	0,983	1,026	0,887	41 mit
28 ag. al 4 sept	240,153	1,171	126,957	1,122	0,966	1,010	0,785	21 mit
4 al 11 septbre	270,147	1,125	143,190	1,128	0,979	1,022	0,862	34 mit
11 al 18 sept.	299,941	1,093	156,751	1,095	0,964	1.024	0,774	20 mit
18 al 25 sept.	319,300	1,065	162,549	1,039	0,931	0,978	0,606	11 mit
25 sept al 2 oct	318,741	0,998	156,191	0,961	0,954	0,989	0,719	16 mit
2 al 9 octubre	307,553	0,965	151,362	0,969	0,974	1,018	0,831	27 mit
9 al 16 octubre	280,44	1,085	160,438	1,06	0,957	1,023	0,736	17 mit
16 al 23 octubre	361,66	1,290	233,00	1,452	1,008	1,039	1,054	92 dpl
23 al 30 octubre	529,74	1,70	296,74	1,19	1,001	1,037	1,007	654 dpl

Medidas de evolución.- Son las que se encuentran en el bloque de las cuatro últimas columnas. Se llaman_así porque nos indican la marcha cualitativa de la epidemia, es decir: en relación con datos anteriores, lo que hasta cierto punto nos permite deducir la situación futura de la epidemia. En nuestro trabajo anterior [7] consignamos tres índices, basados en la teoría de las progresiones geométricas, que puede considerarse un caso particular de las ecuaciones en diferencias. Éstos son los siguientes.

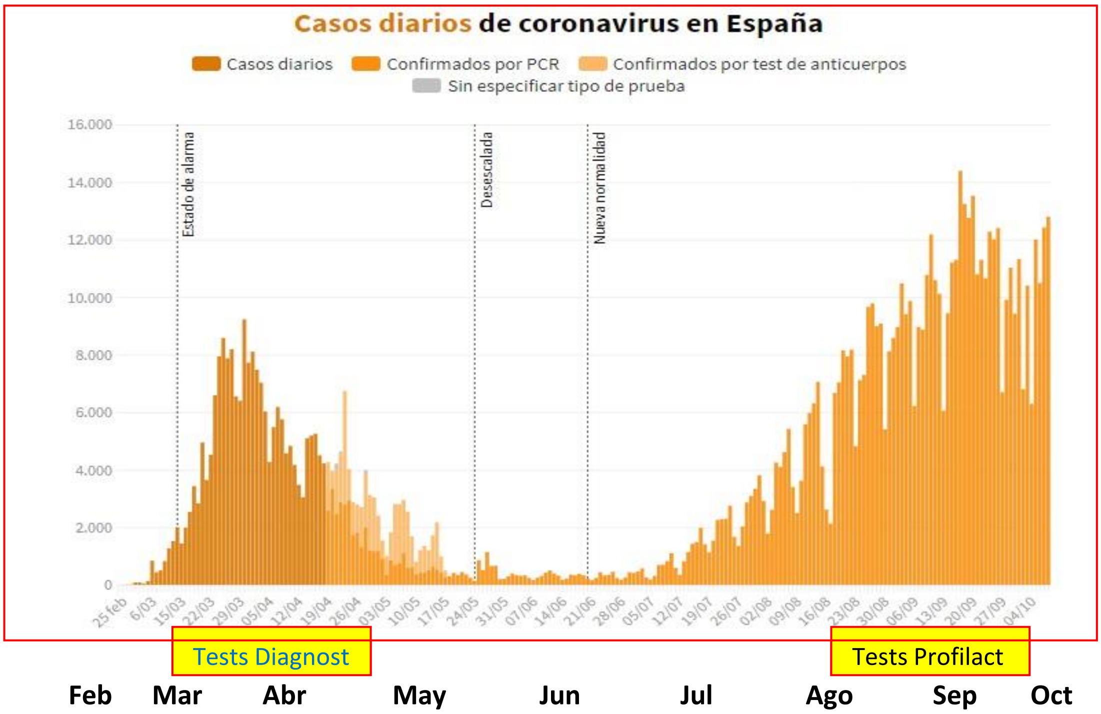
***Rg*,** obtenido a partir de la fórmula que nos proporciona la razón de la progresión, de un día para el siguiente, mediante la suma de términos de estas progresiones, en la forma explicada en el mencionado trabajo.

R'g*,** que no es otra cosa que el cálculo mediante otra fórmula sencilla de la media geométrica de sucesivas razones de la progresión diaria, útil para calcular términos de orden ***n días.

R_{sem} , que es un intento de evaluar el conocido número reproductivo básico, R_0, a partir de una secuencia de ocho días consecutivos, supuesta media del tiempo de contagiosidad evaluado, que puede ser variable.

En estos cálculos se ha tenido muy en cuenta el fenómeno aleatorio que interviene en este tipo de determinaciones, por lo que se requiere establecer unos intervalos de confianza. El valor de cualquiera de estos índices es igual a **1** si la epidemia no mejora ni empeora, es menor que **1** cuando la epidemia va mejorando y superior a **1** si va empeorando. Se establece el intervalo abierto ***(0,95 ; 1,05)*** [8] El signo significa "casi igual" o mejor aún "equivalente".

Finalmente, la última columna supone los días que tardaría a duplicarse el número de contagiados si la evolución fuera empeorando, o de reducirse ese mismo número a la mitad si fuera mejorando.



[7] "Un índice matemático sencillo para valorar la evolución de una epidemia." RAMZ.
[8] Valores de 0,95 y de 1,05 son ya significativos, pero no los comprendidos entre ellos.

Comentarios de la Tabla

La comparación entre la Tabla y el Gráfico muestra en ambos casos que el desarrollo del Covid-19 en España ha tenido lugar hasta ahora en tres fases: una primera de elevación exponencial bastante rápida, que alcanzó su zona alta, "meseta", en la última quincena de abril de este año 2020; siguió una época de descenso hasta estabilizarse en niveles mucho menores desde primeros de junio hasta la primera decena de julio, "valle"; y por último un nuevo ascenso exponencial hasta finales de septiembre, fecha en la que podría iniciarse un nuevo descenso global (tras una fase "meseta"), pero no en todas las comunidades autónomas. De ahí la necesidad de la homologación de los valores de la Incidencia acumulada, a fin de poder juzgar comparativamente regiones muy distintamente pobladas.

Llaman la atención varias cosas. Ante todo la evidente diversidad de los valores del rebrote, cuya explicación apunta a que las medidas tomadas después del cese de la situación de alarma han sido diferentes. Es más, la comparación semana a semana desde la segunda quincena de julio arroja valores frecuentes por encima de **1** en el ***R'g***, en contraposición muchas veces con los valores del ***Rg***, significativamente más bajos con cierta frecuencia. Esta discrepancia se debe, como sabemos, a la mayor liberalidad con la que una parte no despreciable de ciudadanos se ha tomado los fines de semana anteriores las normas profilácticas publicadas, teniendo en cuenta la fase latente de la enfermedad.

Otra peculiaridad es que en las fases de "meseta" estos índices oscilan en las vecindades del valor **1,** lo cual es lógico ya que en tales casos la evolución es menos llamativa al mantenerse durante períodos de tiempo en las "zonas" altas de la Incidencia acumulada. Lo mismo se podría decir de los períodos de permanencia en los "valles".

No está de más insistir en que el ***Rg*** se refiere al período de un solo día; es decir: es la razón multiplicativa constante que determina el número de personas contagiadas cada día en relación con el día anterior. El ***R'g***, en cambio, es la media geométrica de los valores de dicha razón a lo largo del período estudiado. Un ***R'g*** mayor que su correspondiente ***Rg*** denota recrudecimiento de la epidemia en los últimos días del mencionado período, pero también puede señalar un decrecimiento en los primeros días. Viceversa si el valor del ***R'g*** es menor que el del ***Rg.*** Cuando se construye un período, elemento por elemento, a partir del primero, a_1 y de la razón geométrica, ***r*** , razón igual en nuestro caso a ***Rg***, el valor obtenido para ***R'g*** es el mismo que el de ***Rg***, como ya decíamos.

El valor del R_{sem} se refiere a un período de varios días, por ejemplo una semana. Si el número, ***n***, de estos días es el de transmisión efectiva del contagio por cada paciente tenemos entonces el R_0 clásico. De ahí la fórmula ya vista que expresa el valor del R_0 en función del ***Rg*** y de los ***n*** días:

$$R_0 \sim Rg^{\,n-1}$$

La determinación del valor de ***n*** corresponde ya a los expertos en epidemiología, valor que no tiene por qué ser el mismo en una misma epidemia, dependiendo de un conjunto de condiciones experimentales y ambientales como es sabido.

Tampoco estará de más recalcar el carácter aleatorio de todo este tipo de fenómenos biológicos y sociales como son las epidemias. De ahí el tratar estas cuestiones bajo un punto de vista estocástico y no determinístico. Esta es la razón por la que hemos señalado intervalos de confianza para el valor neutro, **1**, en la interpretación de varios de los índices estudiados. También es sabido que otro de los medios para atenuar en lo posible la variabilidad de los fenómenos aleatorios es la precisión y sobre todo la repetición de mediciones, así como el correcto planteamiento metodológico de nuestras investigaciones al respecto.

Terminaremos este artículo con un comentario sobre el llamado ***pico de la epidemia***. Se suele entender por tal el momento en que el número de infectados alcanza su máximo. Aquí también hay varios aspectos a matizar. Tal vez el más saliente de ellos sea decir que, al igual que el R_0, también varía su forma de estimarlo según el modelo seguido. En el SIR, por ejemplo, habría que dar entrada a los fallecidos por la enfermedad y formar esta diferencia: **Pico** = momento en que número de contagiados ***menos*** la ***suma de recuperados más fallecidos*** sea mínima. Ello requiere conocer diariamente todos los términos pero los informes oficiales dejaron de facilitar el de recuperados a mediados de mayo, por lo que ahora hemos de guiarnos por los gráficos como el aquí representado anteriormente o emplear otros procedimientos. No hay que olvidar que en los rebrotes el pico es más "difuso" y menos "puntual".

Lo que podamos añadir es ya muy conocido. Tan sólo insistiremos en que la epidemia no se acaba con el pico, y que constituye un verdadero peligro el relajar las medidas profilácticas cuando creemos que ya ha pasado el pico, tanto si estas medidas son sanitarias como si son sociales y particulares de los ciudadanos.

APÉNDICE 3º.- ¿Cuándo termina un rebrote?

Una cuestión de gran importancia es pronosticar cuándo terminará un brote (o un rebrote) de una epidemia. Naturalmente esta pregunta se ha de referir a zonas geográficas concretas ya que los comienzos y finales de una fase epidémica no son simultáneos en toda la extensión de una pandemia. Una variante del tema, si nos hallamos en la fase ascendente, es aventurar razonablemente cuándo tendrá lugar el llamado *pico de la epidemia*.

La respuesta no es sencilla, ya que el fuerte componente aleatorio de estos episodios hace que estos pronósticos no pasen de ser estimaciones basadas en el cálculo de probabilidades, Por si fuera poco los datos suministrados por los organismos oficiales no siempre son suficientes para poder desarrollar las soluciones al problema. Sin embargo algo podemos hacer, independientemente de nuestras aptitudes matemáticas.

El autor puede exponer una parte de su experiencia sobre los tres procedimientos en los que ha trabajado para intentar resolver esta cuestión. A saber:

1.- El sistema de ecuaciones, ya sean diferenciales, ya en diferencias,
2.- Los diversos procedimientos estadísticos de regresión.
3.- Las propiedades de las progresiones geométricas.

El valor científico de los métodos es decreciente en la relación expuesta, lo que en cierto modo está compensado por su asequibilidad al lector, que sigue un orden creciente en ella.

EL PICO DE LA EPIDEMIA

Es el momento de máxima incidencia en un brote de la misma. Es el momento en que el número de los nuevos casos de infectados alcanza un máximo, por lo común coincidente con un máximo de la incidencia acumulada. Este punto es perfectamente perceptible en los gráficos que representan día a día el número de nuevos contagios. No es completamente correcto situar ese día a partir del primer ´valor diario más bajo que el anterior, ya que este fenómeno puede tener un cariz aleatorio y presentarse después elevaciones en el número diario de nuevos contagios.

Una forma de obviar este inconveniente es calcular cada día el valor de la siguiente expresión:

NTC – (FAL + RCP)

Donde NTC, FAL, RCP son respectivamente los valores acumulados del Número total de contagiados, de Fallecidos y de Recuperados. El **valor máximo** de esta expresión, confirmado varios días consecutivos, detecta el pico del brote en estudio. Esto exige conocer todos estos valores diariamente, lo cual no siempre facilitan los organismos oficiales. Concretamente, desde mediados de mayo no sabemos el número diario de recuperados y tampoco el de contagiados no hospitalizados, si bien estos últimos se intenta extraerlos de los tests positivos que no requieren hospitalización.

SISTEMAS DE ECUACIONES.

El medio más seguro para intentar pronósticos es hallar soluciones al sistema de ecuaciones diferenciales, e incluso al de ecuaciones en diferencias finitas, que forman parte del modelo aceptado, el SIR por ejemplo, pero para ello hay que disponer, como hemos dicho, de los datos necesarios.

Aunque pudiéramos disponer de tales datos, la solución no es nada sencilla, y eso que existen ya fórmulas analíticas de resolución. El procedimiento de cálculo numérico de Runge y Kutta parece ser aplicable en este caso, pero requiere el uso de un programa informático, bien en el Mat-Lab, bien en el QB64, por lo que creemos que no es adecuado para la generalidad de nuestros lectores, máxime si se tiene en cuenta que existen procedimientos asequibles encuadrados en la metodología que venimos siguiendo en este Artículo, como luego veremos.

METODOS DE REGRESIÓN

No es fácil dar una fórmula acertada de la curva de contagios, día a día, en el curso de una epidemia. Viene a tener la forma de la función de densidad de la distribución normal, curva de Gauss, pero asimétrica, con la rama descendente más alargada en el tiempo que la ascendente, cosa natural ya que el período regresivo suele ser más lento que el invasivo. Al igual que la función de Gauss, tiene un ascenso rápido, un punto de inflexión antes de alcanzar el máximo, otro punto de inflexión después de haberlo alcanzado (lo que provoca una concavidad respecto del eje de abscisas en un intervalo que contiene a su máximo valor), y un descenso más lento equiparable con notable aproximación a una función exponencial decreciente. El logaritmo natural de las ordenadas de la rama descendente (número de casos) es una línea sensiblemente recta. De ahí la posibilidad de poder conseguir unos valores de regresión que pueden ser de utilidad para saber qué abscisa (tiempo) corresponderá a los valores ínfimos de esta rama, y por tanto para evaluar con aproximación estadística el tiempo que transcurre hasta su extinción práctica. No nos vamos a detener en su explicación pues es una regresión equiparable a la lineal cuya realización puede consultarse con facilidad, aparte de que ya hemos señalado que vamos a exponer un procedimiento más asequible.

PROPIEDADES DE LAS PROGRESIONES GEOMÉTRICAS

Este procedimiento, ensayado por el autor, además de estar en la línea de la metodología empleada en este artículo, es sencillo y proporciona resultados bastante aceptables, que presentamos mediante un ejemplo real de estos días actuales del rebrote de la epidemia por Covid-19. Se fundamenta en la fórmula [2] de la página 4, que repetimos aquí : $a_n = a_1 \; r^{n-1}$ [2] y que suministra el valor del término a_n de una progresión geométrica conociendo el valor de uno que podemos considerar primero, a_1 , siendo r la razón multiplicativa y n el lugar de orden del término a_n

Ejemplo 3.- Se pide estimar la fecha aproximada de extinción del brote actual de la pandemia por coronavirus, sabiendo los siguientes datos (territorio español) **:** $I_{a(7)}$ = 208,69 ; $I_{a(n)}$ = 7 ; r = 0,458 .
Estos datos corresponden a la fecha 20 de noviembre de 2020; requiere saber cuando quedará reducido el rebrote a 7 casos por cien mil habitantes de Incidencia semanal, que equivale a la extinción práctica de la epidemia. Está claro que podría calcularse con otra cifra de $I_{a(7)}$

Tomando logaritmos naturales en la fórmula [2] y tras una sencilla manipulación algebraica elemental, tenemos la siguiente expresión:

$$n = 1 + \frac{ln(a_n/a_1)}{ln(r_{sem})} \qquad [5]$$

Donde a_n es igual a 7 y a_1 es la Incidencia acumulada de los 7 últimos días. Esta situación equivale a un contagio diario tan solo.

Tratándose de Incidencias acumuladas parece que la razón, ***r***, a elegir debería ser la correspondiente razón de tasas pero ésta es un dato muy versátil, fruto de una sola determinación, que podría originar errores de bulto. Éste es el motivo por el que hemos elegido el R_{sem} , equiparable al ***R0*** y mucho más “estable” que es además un verdadero índice semanal. Tanto el numerador como el denominador del quebrado suelen ser negativos por lo que el valor de la fracción es positivo. Esta técnica se puede utilizar desde el momento en que hayan aparecido durante tres semanas consecutivas valores **menores de 1** de los índices ***Rg*** y de R_{sem}

Operando de esta manera con los datos mencionados, obtenemos el valor ***n = 5,35 semanas*** a partir del 20 de noviembre, o sea en torno al fin del año. Al estar el procedimiento sujeto a las

fluctuaciones aleatorias y a retrocesos imprevisibles, se comprende que el intervalo de días respecto de la fecha señalada puede ser bastante amplio dentro de las habituales normativas de los tests.

Para que el lector pueda juzgar por sí mismo la inestabilidad obligada de este tipo de predicciones, recogemos en la siguiente Tabla los resultados de las mismas, realizados mediante las directrices apuntadas y en la línea del ejemplo 3, con los datos recogidos en las dos últimas semanas. No solo los referidos al territorio de España en su conjunto, sino también a las Comunidades de Aragón y de Navarra. Su examen reflexivo puede ser de gran ayuda para su comprensión.

A reserva de lo que lleguen los expertos epidemiólogos a dictaminar sobre los valores de la incidencia acumulada semanal, siempre referida a cien mil habitantes, como criterio de extinción de laepidemia, la hemos fijado en un caso diario, o sea siete a la semana. El resto de cifras necesarias paralos cálculos, según la fórmula [5], aparecen en la Tabla.

Semana	Valor	España	Aragón	Navarra
13 al 20 nov	**Ia(7)**	208,69	221,86	175,63
“	$\mathbf{R_{sem}}$	0,458	0,449	0,539
“	**Sem. FIN**	**5,35**	**5,32**	**6,81**
20 al 27 nov	**Ia(7)**	152,00	149,02	142,46
“	$\mathbf{R_{sem}}$	0,482	0,487	0,719
“	**Sem. FIN**	**5,22**	**5,27**	**10,13**

En todos los casos la incidencia acumulada final, el a_n de la fórmula [5], se ha fijado en ***7,*** tal como hemos dicho. Modificaciones pequeñas afectarían poco al resultado final.

La fila encabezada por **Sem. FIN** indica en cada columna el número de semanas que han de transcurrir, a partir de la segunda fecha de la columna **Semana**, para legar a dar por extinguido el brote. Así, por ejemplo, diríamos que el pronóstico para Aragón es 5,52 semanas a partir del 20 de noviembre, o bien de 5,27 semanas a partir del 27 de noviembre. Este segundo resultado ha alargado una semana la extinción del brote en relación con el pronóstico de la semana anterior.

Los decimales colocados tras el entero de las filas de **Sem. FIN** pueden servir para ajustar los días dentro de las correspondientes semanas.

La variación de resultados entre las dos fechas pone de manifiesto un leve "frenado" del decrecimiento de la pandemia en España y en Aragón, durante la semana del 20 al 27 de noviembre. Este frenado es de mayor intensidad en Navarra, donde el pronóstico d extinción se retrasa en realidad unos cuatro días y medio. Recordemos que entre las dos series de determinaciones ha transcurrido ya una semana que debería haber acortado en ese mismo tiempo las fechas finales.

ADVERTENCIA FINAL

Una vez más queremos subrayar que el máximo provecho de este tipo de estudios matemáticos se saca de los adecuados sistemas de ecuaciones en diferencias finitas, y aún mejor, en grandes poblaciones, de los sistemas de ecuaciones diferenciales (en tiempo continuo) que integran varios modelos matemáticos de epidemias. Entre otros el SIR de Kermack y McKendrick.

Quede claro una vez más, que en la exposición de este ya largo artículo no hemos pretendido seguir dicho modelo ya que los datos referentes a la reposición de los pacientes nos han faltado. Reconocemos las dificultades de disponer de ellos, pero de hecho no los han proporcionado los medios, por lo que hemos tenido que limitarnos a los de las cifras de contagios, lo cual forzosamente deje incompleto el estudio.

ALGUNAS REFERENCIAS

Kermack,W.O; McKendrick,A,G.
"Contributions to the Mathematical Theory of Epidemics
1927. Proc. Roy. Soc. vol-115, (700-721)
1933. Proc. Roy.S oc. Vol-141, (91-122)

Murray,J.D.
"Mathematical Biology. (2 tomos).
2002. 3ª Ed. Springer, T 1- 10; T 2- 13.

Equipo de Investigación MUNQU
"Modelización epidemiológica del COVID-19"
2020. Universidad Politécnica de Valencia. WEB, 19-III.